CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN
W KLASIE TRZECIEJ GIMNAZJUM
W ROKU SZKOLNYM 2018/2019

CZĘŚĆ 2.

MATEMATYKA

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

ARKUSZ GM-M7

KWIECIEŃ 2019

Zadanie 1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	8. Wykresy funkcji. Uczeń: 4) odczytuje i interpretuje informacje przedstawione za pomocą wykresów funkcji (w tym wykresów opisujących zjawiska występujące w przyrodzie, gospodarce, życiu codziennym).

Rozwiązanie
FP

Schemat punktowania
1 p. – poprawna odpowiedź.
0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń: 2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych zgodnie z własną strategią obliczeń [...].

Rozwiązanie
D

Schemat punktowania
1 p. – poprawna odpowiedź.
0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie). Uczeń: 1) interpretuje liczby wymierne na osi liczbowej. Oblicza odległość między dwiema liczbami na osi liczbowej.

Rozwiązanie
B

Schemat punktowania
1 p. – poprawna odpowiedź.
0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń: 7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (jednostek prędkości, gęstości itp.).

Rozwiązanie
D

Schemat punktowania
1 p. – poprawna odpowiedź.
0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 5. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń: 7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (jednostek prędkości, gęstości itp.).

Rozwiązanie
PP

Schemat punktowania
1 p. – poprawna odpowiedź.
0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 6. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	7. Równania. Uczeń: 5) sprawdza, czy dana para liczb spełnia układ dwóch równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi.

Rozwiązanie
B, C

Schemat punktowania
1 p. – poprawna odpowiedź.
0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 7. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Pierwiastki. Uczeń: 2) wyłącza czynnik przed znak pierwiastka oraz włącza czynnik pod znak pierwiastka.

Rozwiązanie
C

Schemat punktowania
1 p. – poprawna odpowiedź.
0 p. – odpowiedź niepoprawna lub brak odpowiedzi.

Zadanie 8. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	5. Procenty. Uczeń: 3) oblicza liczbę na podstawie danego jej procentu.

Rozwiązanie
B

Schemat punktowania
1 p. – poprawna odpowiedź.
0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 9. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Potęgi. Uczeń: 1) oblicza potęgi liczb wymiernych o wykładnikach naturalnych. *Umiejętność z zakresu szkoły podstawowej*. 2. Działania na liczbach naturalnych. Uczeń: 7) rozpoznaje liczby naturalne podzielne przez 2, 3, 5, 9, 10, 100.

Rozwiązanie
C

Schemat punktowania
1 p. – poprawna odpowiedź.
0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 10. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Uczeń: 4) wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych.

Rozwiązanie
D

Schemat punktowania
1 p. – poprawna odpowiedź.
0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 11. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń: 7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym […].

Rozwiązanie
D

Schemat punktowania
1 p. – poprawna odpowiedź.
0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 12. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Figury płaskie. Uczeń: 7) stosuje twierdzenie Pitagorasa; 8) korzysta z własności kątów […] w trapezach.

Rozwiązanie
PP

Schemat punktowania
1 p. – poprawna odpowiedź.
0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 13. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	8. Wykresy funkcji. Uczeń: 5) oblicza wartości funkcji podanych nieskomplikowanym wzorem i zaznacza punkty należące do jej wykresu.

Rozwiązanie
D

Schemat punktowania
1 p. – poprawna odpowiedź.
0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 14. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	5. Procenty. Uczeń: 1) przedstawia część pewnej wielkości jako procent […] tej wielkości i odwrotnie; 2) oblicza procent danej liczby.

Rozwiązanie
NC

Schemat punktowania
1 p. – poprawna odpowiedź.
0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 15. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	6. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń: 1) opisuje za pomocą wyrażeń algebraicznych związki między różnymi wielkościami; 5) mnoży jednomiany, mnoży sumę algebraiczną przez jednomian oraz, w nietrudnych przykładach, mnoży sumy algebraiczne.

Rozwiązanie
C

Schemat punktowania
1 p. – poprawna odpowiedź.
0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 16. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Figury płaskie. Uczeń: 7) stosuje twierdzenie Pitagorasa.

Rozwiązanie
PP

Schemat punktowania
1 p. – poprawna odpowiedź.
0 p. – odpowiedź niepoprawna lub brak odpowiedzi.

Zadanie 17. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	10. Figury płaskie. Uczeń: 6) oblicza pole koła, pierścienia kołowego, wycinka kołowego.

Rozwiązanie
B

Schemat punktowania
1 p. – poprawna odpowiedź
0 p. – odpowiedź niepoprawna lub brak odpowiedzi

Zadanie 18. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	10. Figury płaskie. Uczeń: 13) rozpoznaje wielokąty [...] podobne; 9) oblicza [...] obwody [...] czworokątów.

Rozwiązanie
FF

Schemat punktowania
1 p. – poprawna odpowiedź.
0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 19. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	11. Bryły. Uczeń: 1) rozpoznaje graniastosłupy i ostrosłupy prawidłowe.

Rozwiązanie
C

Schemat punktowania
1 p. – poprawna odpowiedź.
0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 20. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	11. Bryły. Uczeń: 2) oblicza pole powierzchni [...] graniastosłupa prostego [...], (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).

Rozwiązanie
C

Schemat punktowania
1 p. – poprawna odpowiedź.
0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadania otwarte

Uwaga:

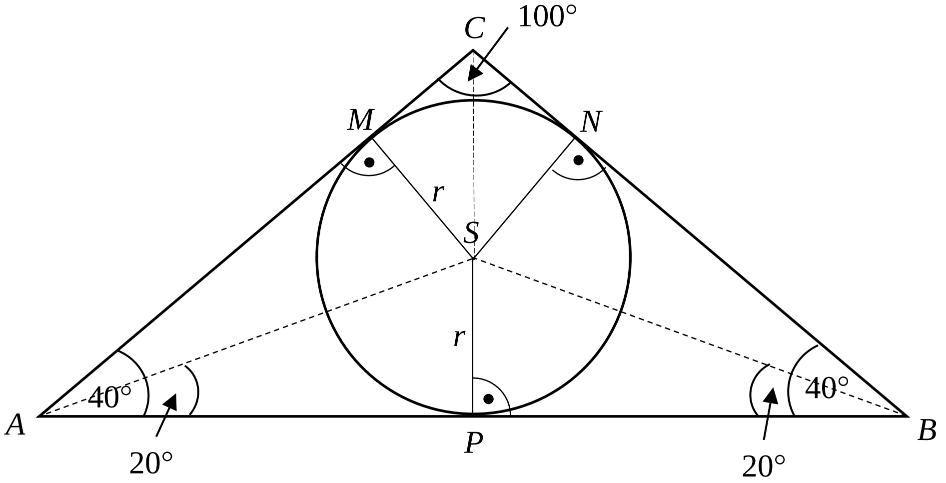
- **Za każde inne niż przedstawione poprawne rozwiązanie przyznaje się maksymalną liczbę punktów.**
- **Jeśli na jakimkolwiek etapie rozwiązania zadania uczeń popełnił jeden lub więcej błędów rachunkowych, ale zastosował poprawne metody obliczania, to ocenę rozwiązania obniża się o 1 punkt.**
- **W pracy ucznia uprawnionego do dostosowanych kryteriów oceniania dopuszcza się:**
    1. lustrzane zapisywanie cyfr i liter (np. 6 – 9, ...)
    2. gubienie liter, cyfr, nawiasów
    3. problemy z zapisywaniem przecinków w liczbach dziesiętnych
    4. błędy w zapisie działań pisemnych (dopuszczalne drobne błędy rachunkowe)
    5. luki w zapisie obliczeń – obliczenia pamięciowe
    6. uproszczony zapis równania i przekształcenie go w pamięci; brak opisu niewiadomych
    7. niekończenie wyrazów
    8. problemy z zapisywaniem jednostek (np.°C – OC, ...)
    9. błędy w przepisywaniu
    10. chaotyczny zapis operacji matematycznych
    11. mylenie indeksów górnych i dolnych (np. x^2 – x2, m^2 – m2, ...).

Zadanie 21. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Figury płaskie. Uczeń: 3) korzysta z faktu, że styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności; 21) konstruuje okrąg [...] wpisany w trójkąt.

Przykładowe rozwiązania

I sposób



Odcinki MS i NS są promieniami okręgu poprowadzonymi do punktów styczności, zatem tworzą z bokami trójkąta kąty proste.
Kąt MSN jest kątem czworokąta, stąd $|\sphericalangle MSN| = 360° - 100° - 2 \cdot 90° = 80°$.

Trójkąt ABC jest równoramienny, zatem kąty przy jego podstawie są równe.

$|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CBA| = (180° - 100°) : 2 = 80° : 2 = 40°$

Odcinek AS zawiera się w dwusiecznej kąta CAB, zatem kąt SAB jest połową kąta CAB.

$|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle CAB| : 2 = 40° : 2 = 20°$

Analogicznie odcinek BS zawiera się w dwusiecznej kąta CBA, zatem kąt SBA jest połową kąta CBA.

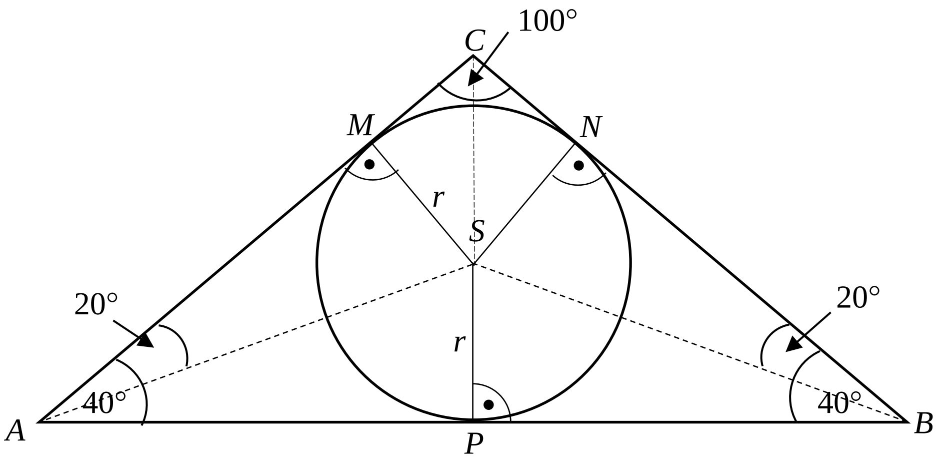
$|\sphericalangle SBA| = |\sphericalangle CBA| : 2 = 40° : 2 = 20°$

Kąt ASB jest kątem trójkąta równoramiennego o kątach przy podstawie o mierze 20°.

Stąd $|\sphericalangle ASB| = 180° - 2 \cdot 20° = 140°$

Odpowiedź: Kąt ASB ma miarę 140°, a kąt MSN ma miarę 80°.

II sposób



Odcinki MS i NS są promieniami okręgu poprowadzonymi do punktów styczności, zatem tworzą z bokami trójkąta kąty proste (mają miary po 90°).

Kąt MSN jest kątem czworokąta, stąd $|\sphericalangle MSN| = 360° - 100° - 2 \cdot 90° = 80°$.

Trójkąt ABC jest równoramienny, zatem kąty przy jego podstawie są równe.

$|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CBA| = (180° - 100°) : 2 = 80° : 2 = 40°$

Odcinek AS zawiera się w dwusiecznej kąta CAB, zatem kąt CAS jest połową kąta CAB.

$|\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle CAB| : 2 = 40° : 2 = 20°$

Analogicznie odcinek BS zawiera się w dwusiecznej kąta CBA, zatem kąt CBS jest połową kąta CBA.

$|\sphericalangle CBS| = |\sphericalangle CBA| : 2 = 40° : 2 = 20°$

Trójkąty MAS i NBS są prostokątne i każdy z nich ma kąt ostry o mierze 20°.

$|\sphericalangle MSA| = |\sphericalangle NSB| = 180° - 90° - 20° = 70°$.

Stąd $|\sphericalangle ASB| = 360° - 2 \cdot 70° - 80° = 140°$

Odpowiedź: Kąt ASB ma miarę 140°, a kąt MSN ma miarę 80°.

Poziom wykonania

P_6 – 2 punkty – pełne rozwiązanie
obliczenie miar kątów ASB i MSN (140° i 80°)

P_2 – 1 punkt – dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane
poprawny sposób obliczania miary kąta MSN

LUB

poprawny sposób obliczania miary kąta *ASB*

LUB

poprawny sposób obliczania miar kątów *MAS* i *MSA*

LUB

poprawny sposób obliczania miar kątów *NBS* i *NSB*

LUB

obliczenie miary kąta przy podstawie trójkąta *ABC* (40°)

P_0 – 0 punktów – rozwiązanie niestanowiące postępu
rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

Zadanie 22. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	7. Równania. Uczeń: 7) za pomocą równań lub układów równań opisuje i rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

x – liczba uczniów klasy IIIa

y – liczba uczniów klasy IIIb

$$\begin{cases} x + \frac{1}{3} y = 33 \\ y + \frac{1}{4} x = 33 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 24 \\ y = 27 \end{cases}$$

Odpowiedź: W klasie IIIa jest 24 uczniów, a klasie IIIb – 27uczniów.

II sposób

x – liczba uczniów klasy IIIa

$x + \frac{1}{3}(33 - \frac{1}{4}x) = 33$

$x = 24$

$33 - \frac{1}{4} \cdot 24 = 27$

Odpowiedź: W klasie IIIa jest 24 uczniów, a klasie IIIb – 27 uczniów.

III sposób

a – liczba uczniów klasy IIIa

b – liczba uczniów klasy IIIb

$a + \frac{1}{3}b = b + \frac{1}{4}a$

$\frac{3}{4}a = \frac{2}{3}b$

$a = \frac{8}{9}b$

$\frac{8}{9}b + \frac{1}{3}b = 33$

$\frac{11}{9}b = 33$

$b = 27$

$a = 24$

Odpowiedź: W klasie IIIa jest 24 uczniów, a klasie IIIb – 27 uczniów.

IV sposób

Liczba uczniów IIIa musi być podzielna przez 4, a liczba uczniów klasy IIIb jest podzielna przez 3 i liczby te muszą być mniejsze niż 33.

Liczba uczniów IIIa	$\frac{1}{4}$ liczby uczniów klasy IIIa	Liczba uczniów IIIb	Czy liczba uczniów IIIb jest podzielna przez 3?	Suma liczebności jednej klasy i ułamka drugiej
12	3	30	+	$\frac{1}{3} \cdot 30 + 12 \neq 33$
16	4	29	–	
20	5	28	–	
24	6	**27**	+	$\frac{1}{3} \cdot 27 + 24 = 33$
28	7	26	–	
32	8	25	–	

Odpowiedź: W klasie IIIa jest 24 uczniów, a klasie IIIb – 27 uczniów.

Poziomy wykonania

P_6 – 3 punkty – pełne rozwiązanie

podanie liczby uczniów klasy IIIa i IIIb (24 i 27)

$P_{5,4}$ – 2 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.) lub rozwiązanie nie zostało dokończone

poprawny sposób wyznaczenia jednej niewiadomej z układu równań

LUB

poprawny sposób wyznaczenia niewiadomej z równania

LUB

sprawdzenie co najmniej dwóch przypadków liczby uczniów w klasach IIIa i IIIb z uwzględnieniem liczb 24 i 27

P_2 – 1 punkt – dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane

zapisanie poprawnego układu równań

LUB

zapisanie poprawnego równania z jedną niewiadomą

LUB

sprawdzenie co najmniej dwóch przypadków liczb uczniów w klasach IIIa i IIIb, z których jedna jest wielokrotnością liczby 3 lub wielokrotnością liczby 4 (bez uwzględnienia liczb 24 i 27)
LUB

podanie liczby uczniów obu klas (24 i 27) i sprawdzenie z warunkami zadania

P_0 – 0 punktów – rozwiązanie niestanowiące postępu
rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

Uwaga
Uczeń, który rozwiązuje zadanie metodą prób i błędów **otrzymuje 3 punkty tylko wtedy, gdy** sprawdzi co najmniej dwa przypadki liczb uczniów w klasach IIIa i IIIb z uwzględnieniem liczb 24 i 27 oraz wskaże poprawne rozwiązanie.

Zadanie 23. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	11. Bryły. Uczeń: 2) oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Obliczamy długość krawędzi podstawy – długość boku trójkąta równobocznego:

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$, więc $a = 8$ (cm)

Obliczamy długość wysokości (krawędzi bocznej) – długość drugiego boku prostokąta:

$8 \cdot h = 24\sqrt{3}$, więc $h = 3\sqrt{3}$ (cm)

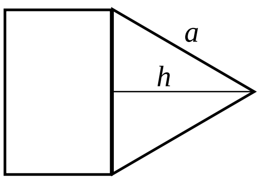
Obliczamy objętość graniastosłupa:

$V = 16\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 144$ (cm^3)

Odpowiedź: Objętość graniastosłupa jest równa 144 cm^3.

II sposób

$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h^2 = a^2$



$h^2 = \frac{3}{4}a^2$

$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = 16\sqrt{3}$

$a = 8$ (cm)

$8 \cdot H = 24\sqrt{3}$

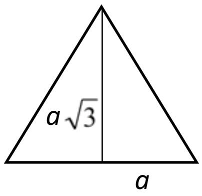
$H = 3\sqrt{3}$ (cm)

$V = 16\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 144$ (cm^3)

Odpowiedź: Objętość graniastosłupa jest równa 144 cm^3.

III sposób

$$\frac{a \cdot a\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = a^2\sqrt{3}$$



$a = 4$

$24\sqrt{3} : 8 = 3\sqrt{3}$

$H = 3\sqrt{3}$ (cm)

$V = 16\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 144\,(\text{cm}^3)$

Odpowiedź: Objętość graniastosłupa jest równa 144 cm^3.

Poziom wykonania

P_6 – 4 punkty – pełne rozwiązanie
obliczenie objętości graniastosłupa (144 cm^3)

P_5 – 3 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.)
poprawny sposób obliczenia objętości graniastosłupa

P_5 – 2 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.)
poprawny sposób obliczenia długości wysokości (drugiego boku prostokąta)

P_2 – 1 punkt − dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane
poprawny sposób obliczenia długości krawędzi podstawy (boku trójkąta równobocznego)

P_0 – 0 punktów – rozwiązanie niestanowiące postępu
rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

Uwaga

- W rozwiązaniu zadania błędne stosowanie jednostek traktujemy jako błąd rachunkowy.
- Jeżeli uczeń zamienia wartość pola trójkąta z wartością pola prostokąta i doprowadza rozwiązanie zadania do końca, stosując wszystkie poprawne metody, to może **otrzymać maksymalnie 2 punkty**. Jeżeli dodatkowo w rozwiązaniu popełnia błędy rachunkowe, to **otrzymuje 1 punkt**.
- Jeżeli uczeń we wzorze na pole trójkąta pomija $\frac{1}{2}$ i rozwiązuje zadanie do końca stosując poprawne metody, to może **otrzymać maksymalnie 2 punkty**. Jeżeli dodatkowo w rozwiązaniu popełnia błędy rachunkowe, to **otrzymuje 1 punkt**.