CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2016/2017

FORMUŁA DO 2014
(„STARA MATURA”)

MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-R1

MAJ 2017

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0−4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania i nierówności z wartością bezwzględną (R3.e).

Przykładowe rozwiązania

I sposób (wyróżnienie na osi liczbowej przedziałów)

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty,1)$, $\langle 1,5)$, $\langle 5,+\infty)$.

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przedziałach i w każdym przedziale bierzemy część wspólną tego przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności.

$x \in (-\infty,1)$	$x \in \langle 1,5)$	$x \in \langle 5,+\infty)$
$-x+1-x+5 \le 10-2x$ $6 \le 10$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $x<1$	$x-1-x+5 \le 10-2x$ $2x \le 6$ $x \le 3$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $1 \le x \le 3$	$x-1+x-5 \le 10-2x$ $4x \le 16$ $x \le 4$ W tym przypadku nierówność nie ma rozwiązania.

Sumując otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: $(-\infty,3\rangle$.

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest $(-\infty,3\rangle$.

II sposób (zapisanie czterech przypadków)

Zapisujemy cztery przypadki:

$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ x-5\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ x-5<0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-1<0 \\ x-5\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-1<0 \\ x-5<0 \end{cases}$

W każdym z nich rozwiązujemy nierówność bądź układ nierówności

$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ x-5\geq 0 \\ x-1+x-5\leq 10-2x \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 1 \\ x\geq 5 \\ 4x\leq 16 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 1 \\ x\geq 5 \\ x\leq 4 \end{cases}$ Brak rozwiązań	$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ x-5<0 \\ x-1-x+5\leq 10-2x \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 1 \\ x<5 \\ 2x\leq 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 1 \\ x<5 \\ x\leq 3 \end{cases}$ Rozw.: $1\leq x\leq 3$	$\begin{cases} x-1<0 \\ x-5\geq 0 \\ -x+1+x-5\leq 10-2x \end{cases}$ $\begin{cases} x<1 \\ x\geq 5 \\ 2x\leq 14 \end{cases}$ $\begin{cases} x<1 \\ x\geq 5 \\ x\leq 7 \end{cases}$ Brak rozwiązań	$\begin{cases} x-1<0 \\ x-5<0 \\ -x+1-x+5\leq 10-2x \end{cases}$ $\begin{cases} x<1 \\ x<5 \\ 6\leq 10 \end{cases}$ Rozw.: $x<1$

Sumując otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: $\left(-\infty,3\right\rangle$.

III sposób (rozwiązanie graficzne)

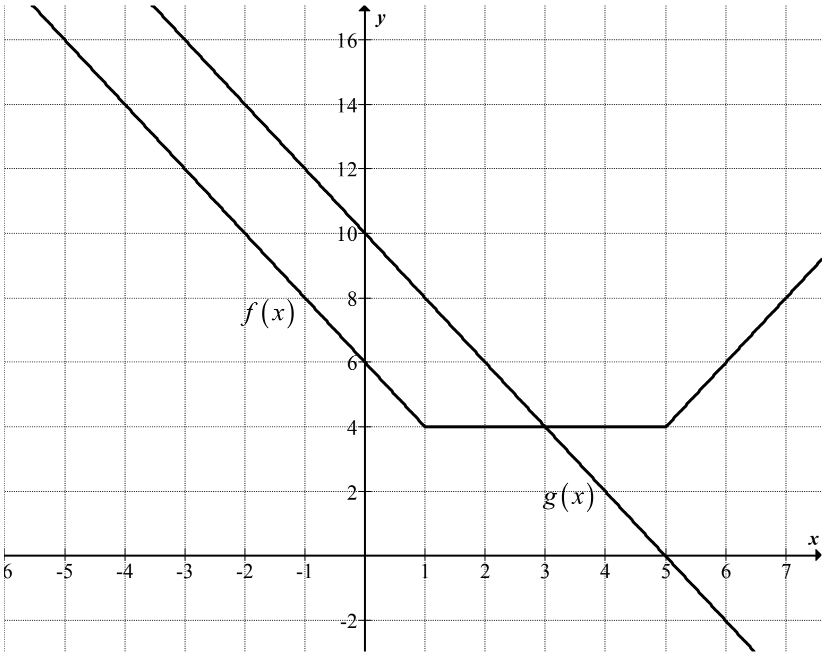
Rysujemy wykresy funkcji $f(x)=|x-1|+|x-5|$ i $g(x)=10-2x$.

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty,1)$, $\langle 1,5)$, $\langle 5,+\infty)$.

Zapisujemy wzór funkcji *f* w poszczególnych przedziałach bez wartości bezwzględnej, np.

$$f(x)=\begin{cases}-2x+6 & \text{dla } x\in(-\infty,1)\\ 4 & \text{dla } x\in\langle 1,5)\\ 2x-6 & \text{dla } x\in\langle 5,+\infty)\end{cases}$$

Rysujemy wykresy funkcji *f* i *g*:



Odczytujemy odciętą punktu przecięcia wykresów funkcji *f* i *g*: $x=3$.

Sprawdzamy, czy spełniają one równanie $|x-1|+|x-5|\le 10-2x$, a następnie podajemy te wszystkie argumenty, dla których $f(x)\le g(x)$: $x\in(-\infty,3\rangle$.

Uwaga

Zdający powinien zauważyć, że wykres funkcji *f* oraz wykres funkcji *g* dla $x\in(-\infty,1\rangle$ są równoległe.

Schemat punktowania

I i II sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... 1 p.

Zdający

- wyróżni na osi liczbowej przedziały $(-\infty,1)$, $\langle 1,5)$, $\langle 5,+\infty)$.

albo

- zapisze cztery przypadki:
$\begin{cases} x-1\ge 0 \\ x-5\ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-1\ge 0 \\ x-5<0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-1<0 \\ x-5\ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-1<0 \\ x-5<0 \end{cases}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Uwaga
Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, to przyznajemy **0 punktów**.
Podobnie **0 punktów** otrzymuje zdający, który błędnie zapisał cztery przypadki.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Zdający

- zapisze nierówności w poszczególnych przedziałach, np.:
dla $x\in(-\infty,1)$ mamy $-x+1-x+5\le 10-2x$,
dla $x\in\langle 1,5)$ mamy $x-1-x+5\le 10-2x$,
dla $x\in\langle 5,+\infty)$ mamy $x-1+x-5\le 10-2x$

albo

- zapisze nierówności w poszczególnych przypadkach, np.:
gdy $x-1\ge 0$ i $x-5\ge 0$, to wtedy $x-1+x-5\le 10-2x$,
gdy $x-1\ge 0$ i $x-5<0$, to wtedy $x-1-x+5\le 10-2x$,
gdy $x-1<0$ i $x-5\ge 0$, to wtedy $-x+1+x-5\le 10-2x$ (lub stwierdzi, że ten przypadek jest niemożliwy),
gdy $x-1<0$ i $x-5<0$, to wtedy $-x+1-x+5\le 10-2x$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Uwagi

1. Jeżeli zdający rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach i na tym zakończy lub nie wyznaczy części wspólnej otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami i kontynuuje rozwiązanie, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający rozpatrzy cztery przypadki, rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach, stwierdzi, że czwarty przypadek jest niemożliwy i na tym zakończy lub nie wyznaczy części wspólnej otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami i kontynuuje rozwiązanie, to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 3 p.

Zdający

- poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko dla dwóch przedziałów (spośród trzech wskazanych w I sposobie rozwiązania), popełni błąd w trzecim i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- zdający rozpatrzy cztery przypadki, poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, popełni błąd w trzecim przypadku oraz stwierdzi, że przypadek:

$$x-1<0 \text{ i } x-5\geq 0$$

jest niemożliwy i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający zapisze odpowiedź: $x\in\left(-\infty,3\right\rangle$.

Uwaga

We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać obie nierówności nieostre (przedziały obustronnie domknięte). Jeżeli natomiast rozważy wszystkie nierówności ostre (przedziały otwarte), to przyznajemy za całe zadanie o **1 punkt mniej**, niż gdyby wyróżnił wszystkie przedziały poprawnie.

III sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający wyróżni na osi liczbowej przedziały: $\left(-\infty,1\right)$, $\left\langle 1,5\right)$, $\left\langle 5,+\infty\right)$.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... 2 p.

Zdający zapisze wzór funkcji f w poszczególnych przedziałach, np.:

dla $x\in\left(-\infty,1\right)$ mamy $f\left(x\right)=-2x+6$,

dla $x\in\left\langle 1,5\right)$ mamy $f\left(x\right)=4$,

dla $x\in\left\langle 5,+\infty\right)$ mamy $f\left(x\right)=2x-6$

lub

$$f\left(x\right)=\begin{cases}-2x+6 & \text{dla } x\in\left(-\infty,1\right)\\ 4 & \text{dla } x\in\left\langle 1,5\right)\\ 2x-6 & \text{dla } x\in\left\langle 5,+\infty\right)\end{cases}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający narysuje wykres funkcji f i prostą o równaniu $y=10-2x$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający zapisze odpowiedź: $x\in\left(-\infty,3\right\rangle$.

Zadanie 2. (0−5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający wykonuje dzielenie wielomianu przez dwumian $x-a$; stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x-a$ (R2.b). 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności wielomianowe (R3.c).

Przykładowe rozwiązanie

Korzystając z warunków zadania zapisujemy układ równań

$\begin{cases} W(3)=0 \\ W(-2)=20 \end{cases}$, czyli $\begin{cases} 54+9a-39+b=0 \\ -16+4a+26+b=20 \end{cases}$

Z układu równań obliczamy a i b

$\begin{cases} 9a+b=-15 \\ 4a+b=10 \end{cases}$, $\begin{cases} 9a+10-4a=-15 \\ b=10-4a \end{cases}$, $\begin{cases} a=-5 \\ b=30 \end{cases}$

Dla $a=-5$, $b=30$ otrzymujemy $W(x)=2x^3-5x^2-13x+30$.

Obliczamy pozostałe pierwiastki wielomianu wykonując np. dzielenie wielomianu $W(x)$ przez $(x-3)$: $W(x)=(x-3)(2x^2+x-10)=2(x-3)(x-2)\left(x+\frac{5}{2}\right)$.

Pozostałymi pierwiastkami wielomianu $W(x)$ są liczby 2 oraz $-\frac{5}{2}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny do rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający zapisze jedno z równań:
$54+9a-39+b=0$ albo $-16+4a+26+b=20$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Uwaga

Wystarczy, że zdający zapisze $\begin{cases} W(3)=0 \\ W(-2)=20. \end{cases}$

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... 2 p.

Zdający zapisze układ równań

$\begin{cases} 54+9a-39+b=0 \\ -16+4a+26+b=20 \end{cases}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający rozwiąże układ równań: $a=-5$, $b=30$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 p.

Zdający

- wykona poprawnie dzielenie wielomianu $W(x)$ przez $(x-3)$:

  $W(x):(x-3)=2x^2+x-10$

albo

- rozwiąże układ równań z błędem rachunkowym i obliczy pozostałe pierwiastki konsekwentnie do popełnionego błędu;

albo

- podzieli wielomian z błędem rachunkowym i obliczy pozostałe pierwiastki konsekwentnie do popełnionego błędu.

Rozwiązanie bezbłędne .... 5 p.

Zdający obliczy pozostałe pierwiastki wielomianu $W(x)$: 2 oraz $-\frac{5}{2}$.

Zadanie 3. (0−5)

III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje wzory Viète'a (R3.a).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Zapisujemy układ warunków

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ (4x_1 - 4x_2)^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy nierówność $\Delta > 0$, czyli $36m^2 - 16(2m^2 - 3m - 9) > 0$. Po uporządkowaniu otrzymujemy nierówność $4(m+6)^2 > 0$, której rozwiązaniem są wszystkie liczby rzeczywiste oprócz $m = -6$.

Drugą nierówność przekształcamy równoważnie i otrzymujemy kolejno:

$$16(x_1 - x_2)^2 - 1 < 0,$$

$$16(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) - 1 < 0,$$

$$16\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right] - 1 < 0.$$

Stosujemy wzory Viete'a i otrzymujemy: $16\left(\frac{36m^2}{16} - 4 \cdot \frac{2m^2 - 3m - 9}{4}\right) - 1 < 0$.

Przekształcamy nierówność równoważnie otrzymujemy kolejno:

$$36m^2 - 32m^2 + 48m + 143 < 0,$$

$$4m^2 + 48m + 143 < 0.$$

Rozwiązujemy tę nierówność.

$$\Delta = 2304 - 2288 = 4^2$$

$$m_1 = \frac{-48-4}{8} = -\frac{13}{2}, \quad m_2 = \frac{-48+4}{8} = -\frac{11}{2},$$

$$m \in \left(-\frac{13}{2}, -\frac{11}{2}\right).$$

Wyznaczamy część wspólną obu warunków: $m \in \left(-\frac{13}{2}, -6\right) \cup \left(-6, -\frac{11}{2}\right)$.

II sposób

Rozwiązujemy nierówność $\Delta > 0$, czyli $36m^2 - 16\left(2m^2 - 3m - 9\right) > 0$. Po uporządkowaniu otrzymujemy nierówność $4\left(m+6\right)^2 > 0$, której rozwiązaniem są wszystkie liczby rzeczywiste oprócz $m = -6$.

Obliczamy pierwiastki równania, z zachowaniem warunku $x_1 < x_2$:

$$x_1 = \frac{6m - 2|m+6|}{8} = \frac{3m - |m+6|}{4}, \quad x_2 = \frac{6m + 2|m+6|}{8} = \frac{3m + |m+6|}{4}.$$

Obliczamy wartość wyrażenia $4x_1 - 4x_2$ w zależności od m:

$$4x_1 - 4x_2 = 4 \cdot \frac{-2|m+6|}{4} = -2|m+6|.$$

Zapisujemy nierówność z treści zadania z wykorzystaniem wyznaczonych rozwiązań równania i przekształcamy ją równoważnie, otrzymując kolejno:

$$\left(-2|m+6| - 1\right)\left(-2|m+6| + 1\right) < 0,$$

$$-\left[1 - 4\left(m+6\right)^2\right] < 0,$$

$$4m^2 + 48m + 143 < 0.$$

Dalsza część rozwiązania przebiega podobnie jak w I sposobie rozwiązania,

Schemat punktowania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.
Pierwszy z nich polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$.
Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.
Uwaga
Jeżeli zdający rozwiąże nierówność $\Delta \geq 0$ i nie odrzuci przypadku $\Delta = 0$, to za ten etap otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na znalezieniu wartości m, dla których spełniona jest nierówność: $\left(4x_1 - 4x_2 - 1\right)\left(4x_1 - 4x_2 + 1\right) < 0$.
Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

Poniżej podział punktów za drugi etap rozwiązania:
Zdający otrzymuje **1 punkt** gdy:

- zapisze nierówność $(4x_1-4x_2-1)(4x_1-4x_2+1)<0$ w postaci równoważnej zawierającej jedynie sumę i iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego $4x^2-6mx+(2m+3)(m-3)$, np.: $16\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]-1<0$

  lub
- obliczy pierwiastki trójmianu:
  $x_1=\frac{6m-2|m+6|}{8}=\frac{3m-|m+6|}{4}$, $x_2=\frac{6m+2|m+6|}{8}=\frac{3m+|m+6|}{4}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje **2 punkty** gdy:

- zapisze nierówność $(4x_1-4x_2-1)(4x_1-4x_2+1)<0$ w postaci nierówności równoważnej z jedną niewiadomą np.: $16\left(\frac{36m^2}{16}-4\cdot\frac{2m^2-3m-9}{4}\right)-1<0$ lub $4m^2+48m+143<0$

  lub $(-2|m+6|-1)(-2|m+6|+1)<0$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje **3 punkty** gdy:

- poprawnie rozwiąże nierówność: $m\in\left(-\frac{13}{2},-\frac{11}{2}\right)$.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności z etapów I i II oraz podaniu odpowiedzi: $m\in\left(-\frac{13}{2},-6\right)\cup\left(-6,-\frac{11}{2}\right)$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwagi

1. W przypadku otrzymania na jednym z etapów (I lub II) zbioru pustego lub zbioru R jako zbioru rozwiązań nierówności przyznajemy **0 punktów** za III etap.
2. W przypadku otrzymania w II etapie zbioru rozwiązań, będącego podzbiorem zbioru rozwiązań z I etapu przyznajemy **0 punktów** za III etap.
3. W przypadku rozwiązania z błędami, nieprzekreślającymi poprawności rozumowania, za ostatni etap przyznajemy **1 punkt** jedynie wówczas, gdy zdający poprawnie wykona etap I i popełnia błędy w rozwiązaniu nierówności z etapu II lub gdy popełnia błędy w etapie I i dobrze rozwiąże etap II (uwaga 3. ma zastosowanie, gdy nie zachodzą przypadki 1. i 2.).
4. Jeżeli zdający w wyniku błędów otrzyma w II etapie nierówność z niewiadomą m stopnia drugiego z ujemnym wyróżnikiem lub nierówność liniową, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
5. W przypadku, gdy zdający przyjmuje błędnie $\sqrt{\Delta}=2(m+6)$ i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca może otrzymać maksymalnie **3 punkty**.

Zadanie 4. (0−6)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym (5.c). 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje układy równań, prowadzące do równań kwadratowych (3.c).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Oznaczmy przez r różnicę ciągu arytmetycznego. Skoro suma wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa 27, to $b-r+b+b+r=27$, a stąd $b=9$. Wówczas ciąg geometryczny $(7-r, 9, 2r+19)$ spełnia warunek $81=(7-r)\cdot(2r+19)$. Równanie to ma dwa rozwiązania $r=4$ i $r=-\frac{13}{2}$.

W pierwszym przypadku otrzymujemy ciąg arytmetyczny $(5,9,13)$, a w drugim przypadku ciąg arytmetyczny $\left(\frac{31}{2}, 9, \frac{5}{2}\right)$.

II sposób

Liczby a, b, c są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego, zatem $\frac{a+c}{2}=b$. Suma liczb a, b, c równa 27, stąd $a+b+c=27$. Ciąg $(a-2, b, 2c+1)$ jest geometryczny, zatem $b^2=(a-2)\cdot(2c+1)$.

Zapisujemy układ trzech równań z trzema niewiadomymi: $\begin{cases} \frac{a+c}{2}=b \\ a+b+c=27 \\ b^2=(a-2)\cdot(2c+1) \end{cases}$

Z pierwszego równania wyznaczamy $a+c=2b$, podstawiamy do drugiego równania i otrzymujemy $b=9$.
Do trzeciego równania podstawiamy $b=9$ i $a=2b-c$ i otrzymujemy równanie kwadratowe: $2c^2-31c+65=0$. Równanie to ma dwa rozwiązania: $c=\frac{5}{2}$ oraz $c=13$. W pierwszym przypadku otrzymujemy: $a=5$, $b=9$, $c=13$ a w drugim przypadku otrzymujemy: $a=\frac{31}{2}$, $b=9$, $c=\frac{5}{2}$.

III sposób

Niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego, natomiast $a-2$ pierwszy wyraz tego ciągu. Wtedy $b=(a-2)q$ i $2c+1=(a-2)q^2$. Z ostatniej zależności otrzymujemy $c=\frac{(a-2)q^2-1}{2}$.

Ponieważ suma liczb a, b, c jest równa 27, więc możemy zapisać równość

$$a+(a-2)q+\frac{(a-2)q^2-1}{2}=27 .$$

Z własności ciągu arytmetycznego wynika równanie

$$b=\frac{a+c}{2},$$

które możemy zapisać w postaci

$$(a-2)q=\frac{2a+(a-2)q^2-1}{4}.$$

Otrzymaliśmy zatem układ równań z niewiadomymi a i q:

$$2a+2(a-2)q+(a-2)q^2=55$$
$$4(a-2)q=2a+(a-2)q^2-1 .$$

Ten układ jest równoważny układowi

$$2(a-2)+2(a-2)q+(a-2)q^2=51$$
$$-2(a-2)+4(a-2)q-(a-2)q^2=3$$

Po wyłączeniu czynnika $(a-2)$ każde z równań przyjmuje postać

$$(a-2)(2+2q+q^2)=51$$
$$(a-2)(-2+4q-q^2)=3$$

Zatem

$$3(2+2q+q^2)=51(-2+4q-q^2),$$

skąd otrzymujemy równanie kwadratowe

$$3q^2-11q+6=0 .$$

To równanie ma dwa rozwiązania

$$q=3,\ q=\frac{2}{3}.$$

Jeśli $q=3$, to $a=5$, $b=9$ i $c=13$. Jeżeli natomiast $q=\frac{2}{3}$, to $a=\frac{31}{2}$, $b=9$ i $c=\frac{5}{2}$.

Schemat punktowania

I sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający uzależni wartości dwie spośród liczb *a*, *b*, *c* od trzeciej z liczb i od różnicy *r* ciągu arytmetycznego, np.: $a=b-r$ i $c=b+r$
i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... **2 p.**

Zdający zapisze równania wynikające z własności ciągu arytmetycznego i z własności ciągu geometrycznego, np.: $a = b - r$, $c = b + r$, $b^2 = (a-2)\cdot(2c+1)$
i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 p.**

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, wynikające z własności ciągu geometrycznego, np.: $81 = (7-r)(2r+19)$
i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... **5 p.**

Zdający obliczy liczby *a*, *b*, *c* w jednym z możliwych przypadków.

Uwaga
Jeśli zdający poprawnie rozwiąże równanie kwadratowe, to otrzymuje **4 punkty**.

Rozwiązanie pełne .... **6 p.**

Zdający obliczy liczby w dwóch przypadkach spełniających warunki zadania: $a = 5$, $b = 9$, $c = 13$ oraz $a = \frac{31}{2}$, $b = 9$, $c = \frac{5}{2}$.

<u>II sposób rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 p.**

Zdający zapisze jedno z równań: $\frac{a+c}{2} = b$, $b^2 = (a-2)\cdot(2c+1)$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... **2 p.**

Zdający zapisze układ trzech równań z trzema niewiadomymi, np.: $\begin{cases} \frac{a+c}{2} = b \\ a+b+c = 27 \\ b^2 = (a-2)\cdot(2c+1) \end{cases}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 p.**

Zdający zapisze równanie kwadratowe z jedną niewiadomą, np.: $-2c^2 + 31c + 16 = 81$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... **5 p.**

Zdający obliczy liczby *a*, *b*, *c* w jednym z możliwych przypadków.

Uwaga
Jeśli zdający poprawnie rozwiąże równanie kwadratowe, to otrzymuje **4 punkty**.

Rozwiązanie pełne .... **6 p.**

Zdający obliczy liczby w dwóch przypadkach spełniających warunki zadania: $a=5$, $b=9$, $c=13$ oraz $a=\frac{31}{2}$, $b=9$, $c=\frac{5}{2}$.

III sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 p.**

Zdający zapisze wszystkie wyrazy ciągu arytmetycznego w zależności od jednej z liczb i ilorazu ciągu geometrycznego, np.

$$a-2\,,\ b=(a-2)q\,,\ c=\frac{(a-2)q^2-1}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... **2 p.**

Zdający zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi, np.:

$$a+(a-2)q+\frac{(a-2)q^2-1}{2}=27 \ \text{ i } \ (a-2)q=\frac{2a+(a-2)q^2-1}{4}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 p.**

Zdający zapisze równanie kwadratowe z jedną niewiadomą, np.:

$$3\left(2+2q+q^2\right)=51\left(-2+4q-q^2\right)$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... **5 p.**

Zdający obliczy liczby a, b i c w jednym z możliwych przypadków.

Uwaga

Jeśli zdający poprawnie rozwiąże równanie kwadratowe, to otrzymuje **4 punkty**.

Rozwiązanie pełne .... **6 p.**

Zdający zapisze dwa zestawy liczb spełniające warunki zadania: $a=5$, $b=9$ i $c=13$ oraz $a=\frac{31}{2}$, $b=9$ i $c=\frac{5}{2}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający myli własności ciągu arytmetycznego z własnościami ciągu geometrycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający odgadnie jeden zestaw liczb *a*, *b*, *c*, także ze sprawdzeniem warunków zadania, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 5. (0−3)

V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający posługuje się wzorami skróconego mnożenia: $(a \pm b)^2$, $(a \pm b)^3$, $a^2 - b^2$, $a^3 \pm b^3$ oraz dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne (2.a, 2.f).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Przekształcamy nierówność równoważnie:

$$x^2y^2 - 4xy + 4 + 2x^2 - 4xy + 2y^2 > 0,$$

$$(xy-2)^2 + 2\left(x^2 - 2xy + y^2\right) > 0,$$

$$(xy-2)^2 + 2(x-y)^2 > 0.$$

Ponieważ $x \neq y$, więc $(x-y)^2 > 0$. Zatem lewa strona tej nierówności jest sumą liczby nieujemnej $(xy-2)^2$ oraz liczby dodatniej $2(x-y)^2$, a więc jest dodatnia.

To kończy dowód.

II sposób

Zapiszmy nierówność $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$ w postaci równoważnej

$$\left(y^2+2\right)x^2 - 8y \cdot x + 2y^2 + 4 > 0.$$

Ponieważ $y^2 + 2 > 0$ dla każdej liczby rzeczywistej y, więc możemy potraktować tę nierówność jak nierówność kwadratową z niewiadomą x i parametrem y (lub z niewiadomą y i parametrem x). Wystarczy więc wykazać, że wyróżnik trójmianu kwadratowego $\left(y^2+2\right)x^2 - 8y \cdot x + 2y^2 + 4$ zmiennej x jest ujemny.

$$\Delta = (-8y)^2 - 4 \cdot \left(y^2+2\right) \cdot \left(2y^2+4\right) = 64y^2 - 8\left(y^2+2\right)^2 =$$

$$= 8\left(8y^2 - y^4 - 4y^2 - 4\right) = 8\left(-y^4 + 4y^2 - 4\right) = -8\left(y^2-2\right)^2.$$

Dla każdej liczby rzeczywistej y, takiej, że $y^2 \neq 2$ wyróżnik jest ujemy. Gdy $y^2 = 2$, to wówczas nierówność $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$ ma postać

$$4x^2 - 8\sqrt{2}x + 8 > 0 \text{ lub } 4x^2 + 8\sqrt{2}x + 8 > 0$$

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 > 0 \text{ lub } x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 > 0,$$

$$\left(x - \sqrt{2}\right)^2 > 0 \text{ lub } \left(x + \sqrt{2}\right)^2 > 0.$$

Ponieważ z założenia wynika, że $x \neq y$, więc $x^2 \neq 2$, a to oznacza, że każda z otrzymanych nierówności jest prawdziwa.

To kończy dowód.

III sposób

Rozpatrzmy nierówność $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$ w trzech przypadkach.

I. Gdy co najmniej jedna z liczb x, y jest równa 0, np. gdy $x = 0$. Wtedy nierówność przyjmuje postać

$$2y^2 + 4 > 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej y.

II. Gdy żadna z liczb x, y nie jest równa 0 i gdy $xy < 0$. Wtedy po lewej stronie nierówności $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$ wszystkie składniki są dodatnie, więc nierówność jest prawdziwa.

III. Gdy żadna z liczb x, y nie jest równa 0 i gdy $xy > 0$. Wtedy, dzieląc obie strony nierówności $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$ przez xy, otrzymujemy nierówność równoważną

$$xy + 2\frac{x}{y} + 2\frac{y}{x} - 8 + \frac{4}{xy} > 0,$$

$$xy + \frac{4}{xy} + 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - 8 > 0,$$

$$xy - 4 + \frac{4}{xy} + 2\left(\frac{x}{y} - 2 + \frac{y}{x}\right) > 0,$$

$$\left(\sqrt{xy} - \frac{2}{\sqrt{xy}}\right)^2 + 2\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 > 0.$$

Ponieważ z założenia $x \neq y$, więc $\frac{x}{y} \neq 1$, zatem $\frac{x}{y} \neq \frac{y}{x}$, co oznacza, że $\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 > 0$.

Stąd i z tego, że $\left(\sqrt{xy} - \frac{2}{\sqrt{xy}}\right)^2 \geq 0$ wynika prawdziwość otrzymanej nierówności.

To kończy dowód.

IV sposób

I. Gdy $xy \leq 0$, to wtedy po lewej stronie nierówności $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$ cztery pierwsze składniki są nieujemne, piąty jest dodatni, więc nierówność jest prawdziwa.

II. Gdy $xy > 0$, wtedy z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną dla liczb dodatnich x^2y^2, $2x^2$, $2y^2$ i 4 otrzymujemy

$$\frac{x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4}{4} \geq \sqrt[4]{x^2y^2 \cdot 2x^2 \cdot 2y^2 \cdot 4} = \sqrt[4]{16x^4y^4} = 2xy,$$

skąd

$$x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4 \geq 8xy.$$

Równość miałaby miejsce tylko wtedy, gdyby $x^2y^2 = 2x^2 = 2y^2 = 4$, a więc gdyby $x^2 = y^2$, co wobec nierówności $xy > 0$ oznaczałoby $x = y$, co jest sprzeczne z założeniem . Zatem

$$x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4 > 8xy,$$

czyli

$$x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0.$$

To kończy dowód.

Schemat punktowania

I sposób rozwiązania

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 p.**

Zdający zapisze nierówność w postaci $(xy-2)^2+2(x-y)^2>0$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... **3 p.**

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie, uwzględniające założenie, że $x \neq y$.

II sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... **1 p.**

Zdający zapisze nierówność w postaci $\left(y^2+2\right)x^2-8y\cdot x+2y^2+4>0$ i obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego $\left(y^2+2\right)x^2-8y\cdot x+2y^2+4$, np.: $\Delta=(-8y)^2-4\cdot\left(y^2+2\right)\cdot\left(2y^2+4\right)$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 p.**

Zdający uzasadni, że wyróżnik $\Delta=-8\left(y^2-2\right)^2$ jest niedodatni dla każdej liczby rzeczywistej *y*, ale nie rozpatrzy przypadku, gdy $y^2=2$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... **3 p.**

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

III sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... **1 p.**

Zdający wykaże prawdziwość nierówności w I i w II przypadku i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 p.**

Zdający zapisze nierówność w postaci $xy+\frac{4}{xy}+2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)-8>0$ w przypadku, gdy $xy>0$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... **3 p.**

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

IV sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... **1 p.**

Zdający wykaże prawdziwość nierówności $x^2y^2+2x^2+2y^2-8xy+4>0$ w I przypadku i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 p.**

Zdający uzasadni, że gdy $xy > 0$, to prawdziwa jest nierówność $\frac{x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4}{4} \geq 2xy$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... **3 p.**

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

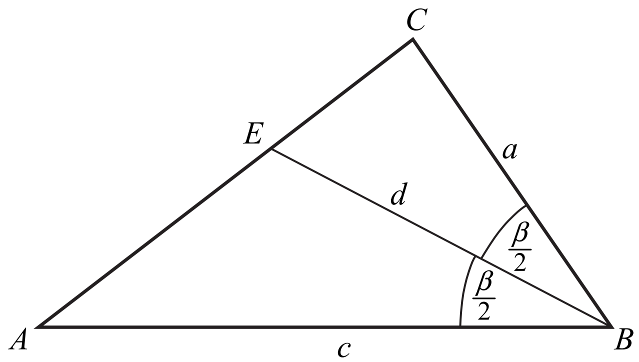
Zadanie 6. (0−3)

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający stosuje własności figur podobnych i jednokładnych w zadaniach, także umieszczonych w kontekście praktycznym oraz znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów (R7.c, R7.d).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta .$$

Pola trójkątów ABE i CBE są równe

$$P_{ABE} = \frac{1}{2} d \cdot c \cdot \sin \frac{\beta}{2} \text{ oraz } P_{CBE} = \frac{1}{2} d \cdot a \cdot \sin \frac{\beta}{2} .$$

Suma pól trójkątów ABE i CBE jest równa polu trójkąta ABC, zatem

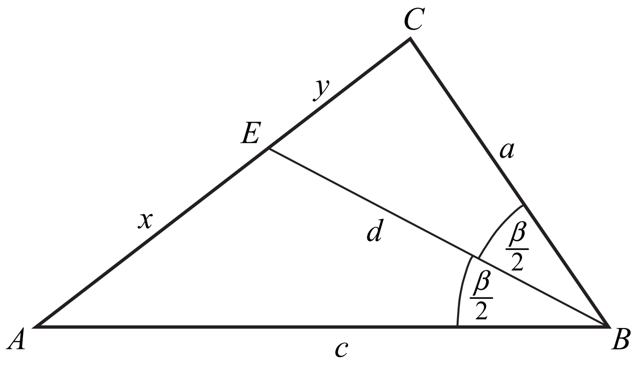
$$\frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} d \cdot c \cdot \sin \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} d \cdot a \cdot \sin \frac{\beta}{2} .$$

Stąd
$$a\cdot c\cdot 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}=d\cdot(a+c)\cdot\sin\frac{\beta}{2},$$
$$2ac\cdot\cos\frac{\beta}{2}=d\cdot(a+c),$$
$$d=\frac{2ac}{a+c}\cdot\cos\frac{\beta}{2}.$$

To kończy dowód.

II sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z twierdzenia o dwusiecznej otrzymujemy
$$\frac{|CE|}{|AE|}=\frac{|CB|}{|AB|},\ \text{czyli}\ \frac{y}{x}=\frac{a}{c}.$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów ABE i CBE otrzymujemy
$$x^2=c^2+d^2-2cd\cos\frac{\beta}{2}\ \text{ oraz }\ y^2=a^2+d^2-2ad\cos\frac{\beta}{2}.$$

Zatem
$$\frac{a^2}{c^2}=\frac{y^2}{x^2}=\frac{a^2+d^2-2ad\cos\frac{\beta}{2}}{c^2+d^2-2cd\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Stąd otrzymujemy
$$a^2\left(c^2+d^2-2cd\cos\frac{\beta}{2}\right)=c^2\left(a^2+d^2-2ad\cos\frac{\beta}{2}\right),$$
$$a^2c^2+a^2d^2-2a^2cd\cos\frac{\beta}{2}=a^2c^2+c^2d^2-2ac^2d\cos\frac{\beta}{2},$$
$$a^2d^2-c^2d^2=2a^2cd\cos\frac{\beta}{2}-2ac^2d\cos\frac{\beta}{2},$$
$$\left(a^2-c^2\right)d=2(a-c)ac\cos\frac{\beta}{2}.$$

Gdy $a = c$, wówczas trójkąt *ABC* jest równoramienny, więc trójkąty *ABE* i *CBE* są prostokątne i przystające. Wtedy $\cos\frac{\beta}{2} = \frac{d}{c}$, skąd $d = c\cos\frac{\beta}{2} = \frac{2c^2}{2c}\cos\frac{\beta}{2} = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\beta}{2}$.

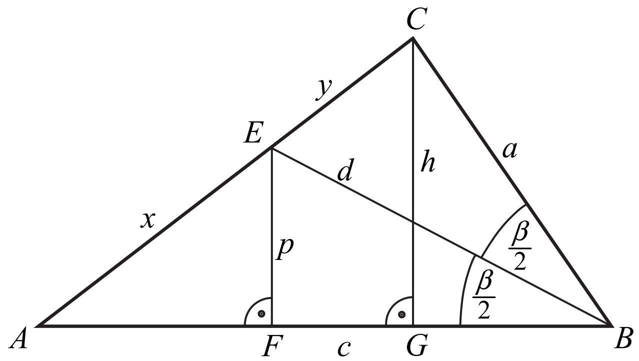
Gdy zaś $a \neq c$, to $(a-c)(a+c) \neq 0$, czyli $a^2 - c^2 \neq 0$, więc

$$d = \frac{2(a-c)}{a^2-c^2}ac\cos\frac{\beta}{2} = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\beta}{2}.$$

To kończy dowód.

<u>III sposób</u>

Poprowadźmy wysokości *CG* i *EF* trójkątów *ABC* i *ABE*. Ponieważ trójkąt *ABC* jest ostrokątny, więc spodki *F* i *G* tych wysokości leżą na boku *AB* trójkąta *ABC*. Pozostałe oznaczenia przyjmijmy jak na rysunku.



Z twierdzenia o dwusiecznej otrzymujemy

$$\frac{|CE|}{|AE|} = \frac{|CB|}{|AB|}, \text{ czyli } \frac{y}{x} = \frac{a}{c}.$$

Z trójkątów *BEF* i *BCG* otrzymujemy

$$\frac{p}{d} = \sin\frac{\beta}{2} \text{ oraz } \frac{h}{a} = \sin\beta.$$

Stąd

$$p = d\sin\frac{\beta}{2} \text{ oraz } h = a\sin\beta.$$

Trójkąty *AFE* i *AGC* są podobne, gdyż oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku *A*. Zatem

$$\frac{|EF|}{|AE|} = \frac{|CG|}{|AC|}, \text{ czyli } \frac{p}{x} = \frac{h}{x+y}.$$

Stąd i z poprzednio otrzymanych równości otrzymujemy kolejno

$$\frac{d\sin\frac{\beta}{2}}{x}=\frac{a\sin\beta}{x+y},$$

$$d\sin\frac{\beta}{2}=\frac{a\cdot 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{1+\frac{y}{x}},$$

$$d=\frac{2a\cdot\cos\frac{\beta}{2}}{1+\frac{a}{c}}=\frac{2ac\cdot\cos\frac{\beta}{2}}{a+c}.$$

To kończy dowód.

Schemat punktowania

<u>I sposób rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... 1 p.

Zdający

- zapisze pola każdego z trójkątów *ABC*, *ABE* i *CBE* w zależności od długości *a*, *c*, *d* i kąta β: $P_{ABC}=\frac{1}{2}a\cdot c\cdot\sin\beta$, $P_{ABE}=\frac{1}{2}d\cdot c\cdot\sin\frac{\beta}{2}$, $P_{CBE}=\frac{1}{2}d\cdot a\cdot\sin\frac{\beta}{2}$

albo

- zapisze, że pole trójkąta *ABC* jest sumą pól trójkątów *ABE* i *CBE* oraz zapisze jedno z tych pól: $P_{ABC}=\frac{1}{2}a\cdot c\cdot\sin\beta$ lub $P_{ABE}=\frac{1}{2}d\cdot c\cdot\sin\frac{\beta}{2}$ lub $P_{CBE}=\frac{1}{2}d\cdot a\cdot\sin\frac{\beta}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Zdający zapisze zależność między polem trójkąta *ABC* i polami trójkątów *ABE* i *CBE* w postaci, w której występują jedynie wielkości *a*, *c*, *d* i β, np.:

$$\frac{1}{2}a\cdot c\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}d\cdot c\cdot\sin\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}d\cdot a\cdot\sin\frac{\beta}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

II sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... 1 p.

Zdający zapisze zależności między wielkościami x, y, d, a i c oraz kątem β:

$$\frac{y}{x}=\frac{a}{c},\ x^2=c^2+d^2-2cd\cos\frac{\beta}{2},\ y^2=a^2+d^2-2ad\cos\frac{\beta}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Zdający zapisze równanie, np.: $\dfrac{a^2}{c^2}=\dfrac{a^2+d^2-2ad\cos\frac{\beta}{2}}{c^2+d^2-2cd\cos\frac{\beta}{2}}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwaga
Jeżeli zdający nie rozważy sytuacji gdy $a=c$, to może otrzymać co najwyżej 2 punkty.

III sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... 1 p.

Zdający zapisze

- zależność między wielkościami x, y, a i c oraz zależności między wielkościami p, h i a oraz kątem β: $\dfrac{y}{x}=\dfrac{a}{c}$, $\dfrac{p}{d}=\sin\dfrac{\beta}{2}$, $\dfrac{h}{a}=\sin\beta$

albo

- zależność między wielkościami x, y, a i c oraz zależności między wielkościami p, h, x i y oraz kątem β: $\dfrac{y}{x}=\dfrac{a}{c}$, $\dfrac{p}{x}=\dfrac{h}{x+y}$

albo

- zależność między wielkościami p, h i a oraz kątem β oraz zależność między wielkościami x, y, a i c: $\dfrac{p}{d}=\sin\dfrac{\beta}{2}$, $\dfrac{h}{a}=\sin\beta$, $\dfrac{y}{x}=\dfrac{a}{c}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Zdający zapisze wystarczającą liczbę zależności między wielkościami x, y, a, c, p i h oraz kątem β, pozwalającą wyznaczyć d w zależności od wielkości a, c i kąta β, np.:

$$\frac{y}{x}=\frac{a}{c},\ \frac{d\sin\frac{\beta}{2}}{x}=\frac{a\sin\beta}{x+y}.$$

Rozwiązanie pełne .... 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 7. (0−4)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych (R10).

Przykładowe rozwiązanie

Wybieramy miejsce dla dziewiątek. Jest $\binom{6}{2}=15$ takich miejsc.

Szóstka może wystąpić na jednym z pozostałych 4 miejsc.

Na pozostałych trzech miejscach mają wystąpić trzy cyfry, których suma ma być równa $30-2\cdot 9-6=6$.

Mamy następujące możliwości:
1, 2, 3 i na trzech miejscach te cyfry możemy ustawić na $3!=6$ sposobów,
1, 1, 4 i na trzech miejscach te cyfry możemy ustawić na $\binom{3}{2}\binom{1}{1}=3$ sposoby,
2, 2, 2 i na trzech miejscach te cyfry możemy ustawić na $\binom{3}{3}=1$ sposób.

Łącznie, pozostałe trzy cyfry na pozostałych trzech miejscach, możemy ustawić na 10 sposobów.
Stosując regułę mnożenia zapisujemy, że liczba liczb opisanych w treści zadania jest równa $15\cdot 4\cdot 10=600$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.
Zdający
- obliczy liczbę miejsc, na których mogą znajdować się dziewiątki

albo
- obliczy liczbę miejsc, na których może znajdować się szóstka

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający obliczy liczbę miejsc, na których mogą znajdować się dziewiątki i szóstka, albo obliczy na ile sposobów można ustawić pozostałe trzy cyfry na trzech miejscach, które pozostały.
i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający obliczy liczbę miejsc, na których mogą znajdować się dziewiątki i szóstka i na ile sposobów można ustawić pozostałe trzy cyfry na trzech miejscach, które pozostały i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... **4 p.**
Zdający zastosuje regułę mnożenia i obliczy, że liczba liczb opisanych w treści zadania jest równa 600.

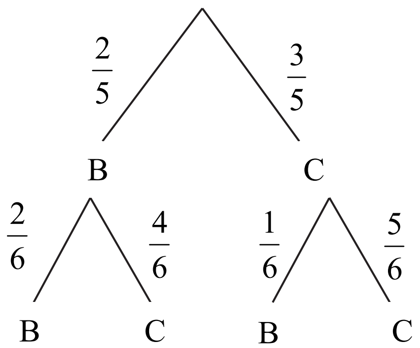
Uwaga
Zdający może obliczać liczby miejsc dla dziewiątek i szóstki w sposób następujący:
$\binom{6}{2} \cdot 4 = 60$ albo $6 \cdot \binom{5}{2} = 60$.

Zadanie 8. (0−3)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (10.d).

Przykładowe rozwiązanie

Rysujemy drzewo odzwierciedlające etapy doświadczenia.



Prawdopodobieństwo zdarzenia A (wylosowanie kuli białej z drugiego pudełka) jest więc równe

$$P(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{30} + \frac{3}{30} = \frac{7}{30}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... **1p.**
Zdający narysuje drzewo wraz z opisem prawdopodobieństw na pierwszym etapie doświadczenia i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 p.**
Zdający narysuje drzewo wraz z opisem prawdopodobieństw na wszystkich istotnych gałęziach i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... **3 p.**

Zdający obliczy prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z drugiego pudełka: $\frac{7}{30}$.

Uwaga

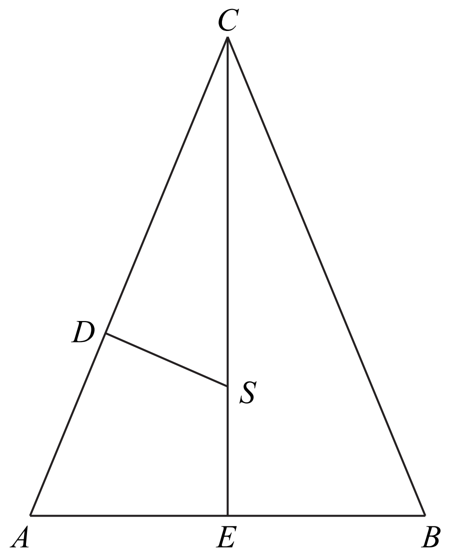
Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A) > 1$ lub $P(A) < 0$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 9. (0−6)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający stosuje własności figur podobnych i jednokładnych w zadaniach, także umieszczonych w kontekście praktycznym (R7.c).

Przykładowe rozwiązania

I sposób



Oznaczmy przez S środek okręgu wpisanego w trójkąt, wysokość $|CE| = 36$ oraz promień okręgu wpisanego $|ES| = |DS| = 10$.

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość odcinka DC: $|DC| = \sqrt{|CS|^2 - |DS|^2} = 24$.

Trójkąty AEC i SDC są podobne. Obydwa są prostokątne i mają jeden kąt wspólny.

Otrzymujemy równanie $\frac{36}{|AE|} = \frac{24}{10}$. Stąd $|AE| = 15$. Z twierdzenia o odcinkach stycznych wiemy, że $|AD| = |AE| = 15$. Długości boków tego trójkąta są zatem równe: $|AB| = 30$, $|AC| = |BC| = 39$.

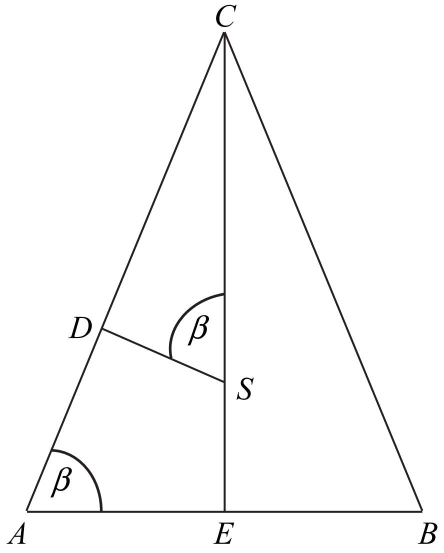
Następnie obliczmy pole trójkąta. $P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CE| = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 36 = 540$.

Promień okręgu opisanego na trójkącie obliczymy korzystając ze wzoru

$$P = \frac{|AB| \cdot |BC| \cdot |CA|}{4 \cdot R}:$$

$$R = \frac{30 \cdot 39 \cdot 39}{4 \cdot 540} = 21\frac{1}{8}.$$

<u>II sposób</u>



Oznaczmy przez S środek okręgu wpisanego w trójkąt, wysokość $|CE| = 36$ oraz promień okręgu wpisanego $|ES| = |DS| = 10$. Niech $|\sphericalangle CSD| = |\sphericalangle CAE| = \beta$.
Trójkąty AEC i SDC są podobne. Obydwa są prostokątne i mają jeden kąt wspólny.

Obliczamy długość odcinka CS: $|CS| = |CE| - |SE| = 26$.

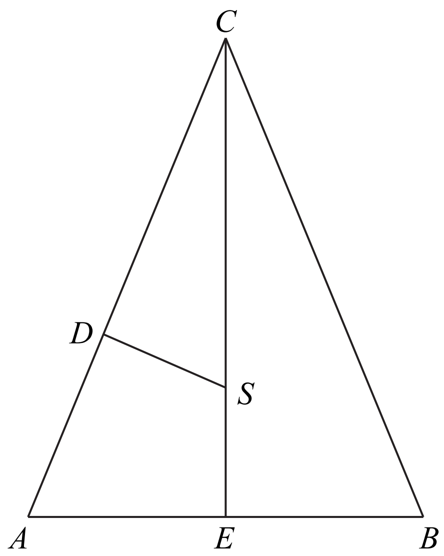
Obliczamy $\cos\beta = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$, wtedy $\sin\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$.

Obliczamy długość ramienia trójkąta równoramiennego ABC: $\sin\beta = \frac{|CE|}{|AC|}$, stąd $|AC| = 39$.

Z twierdzenia sinusów $\frac{|AC|}{\sin\beta} = 2R$, gdzie R oznacza promień okręgu opisanego na trójkącie:

$$2R = \frac{39}{\frac{12}{13}} = \frac{507}{12} = 42\frac{1}{4}, \text{ zatem } R = 21\frac{1}{8}.$$

III sposób



Niech $|AB| = a$, $|AC| = |BC| = b$.

Zapisujemy pole trójkąta na trzy sposoby: $\frac{1}{2} \cdot a \cdot 36 = \frac{ab^2}{4R} = 10p$.

Ponieważ $p = \frac{1}{2}(a + 2b)$, stąd $p = \frac{1}{2}a + b$.

Otrzymujemy równanie $\frac{1}{2} \cdot a \cdot 36 = 10\left(\frac{1}{2}a + b\right)$, stąd $b = \frac{13}{10}a$.

Zapisujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta AEC: $\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + 36^2 = b^2$, stąd $a = 30$.

Zatem $b = \frac{13}{10} \cdot 30 = 39$.

Ponieważ $\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 36 = \frac{30 \cdot 39^2}{4R}$, stąd otrzymujemy $R = 21\frac{1}{8}$.

Schemat punktowania

I sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający obliczy długość odcinka $|DC| = 24$.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... 2 p.

Zdający zapisze równanie wynikające z podobieństwa trójkątów AEC i SDC: $\frac{36}{|AE|} = \frac{24}{10}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 p.

Zdający obliczy długości boków trójkąta $|AB| = 30$, $|AC| = |BC| = 39$.

Uwaga

Jeżeli zdający obliczy jedynie długość podstawy trójkąta: $|AB| = 30$ albo jedynie długość ramienia trójkąta: $|AC| = |BC| = 39$, to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie prawie pełne .... 5 p.

Zdający obliczy pole trójkąta: $P = 540$.

Rozwiązanie pełne .... 6 p.

Zdający obliczy promień okręgu: $R = 21\frac{1}{8}$.

Uwaga

Jeżeli zdający obliczy promień okręgu: $R = 21\frac{1}{8}$ i nie obliczy długości ramienia trójkąta: $|AC| = |BC| = 39$, to otrzymuje co najwyżej **5 punktów**.

II sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 p.

Zdający obliczy $\cos\beta$: $\cos\beta = \frac{5}{13}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający obliczy $\cos\beta$ i $\sin\beta$: $\cos\beta = \frac{5}{13}$ i $\sin\beta = \frac{12}{13}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 p.

Zdający obliczy długość ramienia trójkąta *ABC*: $|AC| = |BC| = 39$ i zauważy, że $\frac{|AC|}{\sin\beta} = 2R$.

Uwaga

Jeżeli zdający jedynie zauważy, że $\frac{|AC|}{\sin\beta} = 2R$ albo jedynie obliczy długość ramienia trójkąta: $|AC| = |BC| = 39$, to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie prawie pełne .... 5 p.

Zdający zastosuje twierdzenie sinusów i zapisze, że $\frac{|AC|}{\sin\beta} = 2R$.

Rozwiązanie pełne .... 6 p.

Zdający obliczy promień okręgu: $R = 21\frac{1}{8}$.

Uwaga

Jeżeli zdający obliczy promień okręgu: $R = 21\frac{1}{8}$ i nie obliczy długości podstawy trójkąta: $|AB| = 30$ to otrzymuje co najwyżej **5 punktów**.

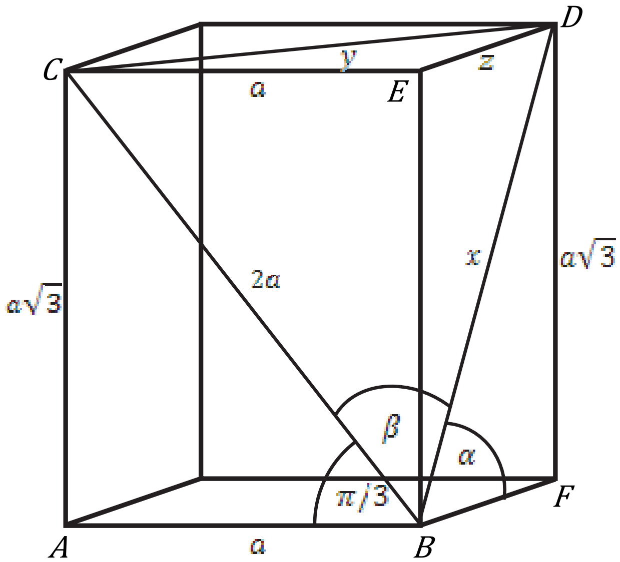
Zadanie 10. (0−6)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający wyznacza przekroje wielościanów płaszczyzną oraz wyznacza związki miarowe w wielościanach i bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii (R9.a, 9.b).

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>

Sporządzamy rysunek pomocniczy, wprowadzając oznaczenia i zaznaczając odpowiednie kąty.



Ponieważ trójkąt ABC jest trójkątem pięknym, przyjmijmy, że długości jego boków są równe a, $2a$, $a\sqrt{3}$.

Stosując twierdzenie cosinusów do trójkąta BDC otrzymujemy $y^2 = x^2 + 4a^2 - ax\sqrt{6}$.

Stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkątów CED i BDE otrzymujemy:

$x^2 + 4a^2 - ax\sqrt{6} = a^2 + z^2$

$x^2 + 3a^2 - ax\sqrt{6} = x^2 - 3a^2 \qquad a > 0$

$x = a\sqrt{6}$

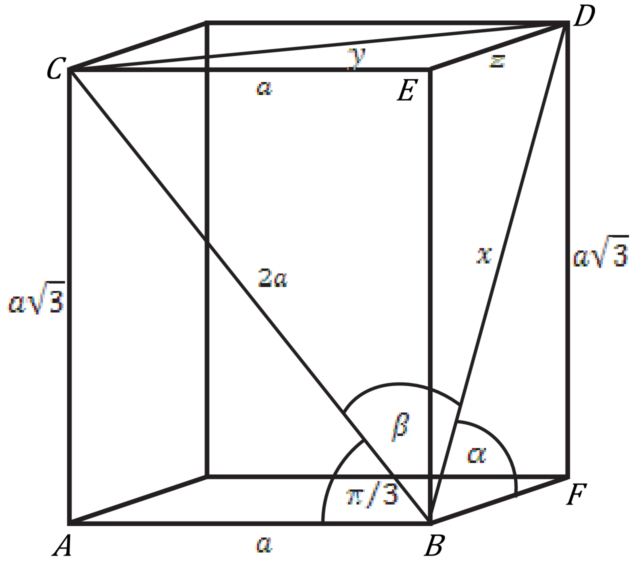
Zatem w trójkącie BFD mamy

$$\sin\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Stąd $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

Kąt między przekątnymi ścian bocznych prostopadłościanu jest równy $\dfrac{\pi}{4}$.

II sposób
Sporządzamy rysunek pomocniczy, wprowadzając oznaczenia i zaznaczając odpowiednie kąty.



Ponieważ trójkąt ABC jest trójkątem pięknym, przyjmijmy, że długości jego boków są równe a, $2a$, $a\sqrt{3}$.
Zapisujemy długości boków x i z trójkąta BFD w zależności od szukanego kąta α:

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{\sin\alpha} \text{ i } z = \frac{a\sqrt{3}}{\mathrm{tg}\alpha} \quad \text{dla } a > 0 \text{ i } \alpha \neq 0$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CED otrzymujemy

$$y^2 = a^2 + z^2$$

$$y^2 = a^2 + \frac{3a^2}{\mathrm{tg}^2\alpha}$$

Zapisujemy twierdzenie cosinusów dla trójkąta BDC:

$$y^2 = 4a^2 + x^2 - 4ax\cos\beta$$

Po dokonaniu podstawień za x i y otrzymujemy równanie postaci:

$$a^2 + \frac{3a^2}{tg^2\alpha} = 4a^2 + \frac{3a^2}{\sin^2\alpha} - \frac{a^2\sqrt{18}}{\sin\alpha}$$

a po przekształceniach równanie trygonometryczne:

$$2\sin^2\alpha - \sqrt{2}\sin\alpha = 0$$

$$\sin\alpha\left(\sin\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

Rozwiązujemy alternatywę równań

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\sin\alpha = 0$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$ lub $\alpha = 0$ nie spełnia warunków zdania

Zatem kąt między przekątnymi ścian bocznych prostopadłościanu ma miarę $\frac{\pi}{4}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający sporządzi rysunek i zaznaczy odpowiednie kąty $\frac{\pi}{3}$, α, β i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... 2 p.

Zdający zapisze długości boków trójkąta ABC za pomocą jednej zmiennej, np.: a, $2a$, $a\sqrt{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności ....4 p.

Zdający

- zapisze równanie z niewiadomymi a i x, prowadzące do rozwiązania zadania, np.: $x^2 + 3a^2 - ax\sqrt{6} = x^2 - 3a^2$

albo

- zapisze równanie z niewiadomymi a i α, prowadzącego do rozwiązania zadania, np.: $a^2 + \frac{3a^2}{tg^2\alpha} = 4a^2 + \frac{3a^2}{\sin^2\alpha} - \frac{a^2\sqrt{18}}{\sin\alpha}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 5 p.

Zdający popełni błąd rachunkowy na etapie przekształceń równań i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca.

Rozwiązanie pełne .... 6 p.

Zdający wyznaczy miarę kąta α: $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze równanie z niewiadomymi a i x albo z niewiadomymi a i α, z błędami rachunkowymi i na tym poprzestanie, to otrzymuje **3 punkty**.

Zadanie 11. (0−5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, wyznacza współrzędne środka odcinka, rozwiązuje zadania dotyczące wzajemnego położenia prostej i okręgu, oraz dwóch okręgów na płaszczyźnie kartezjańskiej (8.g, 8.f, R8.b).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Środek S szukanego okręgu jest punktem przecięcia prostej $x-3y+1=0$ oraz symetralnej odcinka AB.

Wyznaczmy współrzędne środka D odcina AB: $D=\left(\frac{-5+0}{2},\frac{3+6}{2}\right)=\left(\frac{-5}{2},\frac{9}{2}\right)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A i B:

$$a_{AB}=\frac{6-3}{0+5}=\frac{3}{5}.$$

Z warunku prostopadłości prostych wyznaczamy współczynnik kierunkowy symetralnej odcinka AB: $a=-\frac{5}{3}$. Wyznaczamy równanie symetralnej odcinka AB: $y=-\frac{5}{3}x+b$.

Przechodzi ona przez punkt $D=\left(-\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)$, stąd otrzymujemy $\frac{9}{2}=-\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+b$. Zatem $b=\frac{1}{3}$. Wobec tego symetralną odcinka AB jest prosta $y=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$.

Obliczamy współrzędne punktu S, rozwiązując układ równań $\begin{cases} x-3y+1=0 \\ y=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}. \end{cases}$ Środkiem okręgu jest $S=\left(0,\frac{1}{3}\right)$.

Wyznaczamy promień okręgu r obliczając np.: $|AS|=\sqrt{5^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{17}{3}$.

Wyznaczamy równanie okręgu o środku w punkcie $S=\left(0,\frac{1}{3}\right)$ i promieniu $r=\frac{17}{3}$:

$x^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{289}{9}$.

II sposób

Środkiem okręgu jest punkt S, który leży na prostej $x-3y+1=0$. Zatem $S=(3y-1,\, y)$.

Ponieważ $|AS|^2=|BS|^2$, więc możemy zapisać równanie $(x+5)^2+(y-3)^2=x^2+(y-6)^2$.

Rozwiązujemy zatem układ równań

$$10x+6y=2 \text{ i } x-3y=-1,$$

otrzymując współrzędne punktu S

$$S=\left(0, \frac{1}{3}\right).$$

Następnie obliczamy kwadrat długości promienia $|SB|^2=r^2$

$$r^2=\left(\frac{17}{3}\right)^2=\frac{289}{9}.$$

Zatem równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r ma postać $x^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{289}{9}$.

III sposób

Przyjmijmy, że punkt $S=(a,b)$ jest środkiem szukanego okręgu. Ponieważ punkt ten leży na prostej $x-3y+1=0$, więc jego współrzędne spełniają równanie tej prostej. Stąd $a-3b+1=0$.

Okrąg przechodzi przez punkty $A=(-5,3)$ i $B=(0,6)$, zatem

$$\begin{cases}(-5-a)^2+(3-b)^2=r^2\\(-a)^2+(6-b)^2=r^2.\end{cases}$$

Stąd otrzymujemy zależność między a i b: $5a+3b-1=0$.

Z układu równań

$$\begin{cases}a-3b+1=0\\5a+3b-1=0\end{cases}$$

obliczamy współrzędne środka okręgu $S=\left(0, \frac{1}{3}\right)$. Wyznaczone współrzędne podstawiamy do jednego z równań układu z niewiadomą r i obliczamy kwadrat promienia okręgu: $r^2=\frac{289}{9}$.

Zatem szukane równanie okręgu ma postać: $x^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{289}{9}$.

Schematy punktowania

I sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający

- wyznaczy współrzędne środka odcinka AB: $D=\left(-\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)$

albo

- wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej zawierającej odcinek AB: $a_{AB}=\frac{3}{5}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... 2 p.

Zdający zapisze równanie symetralnej odcinka AB: $y=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 3 p.

Zdający wyznaczy współrzędne punktu S: $S=\left(0,\frac{1}{3}\right)$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 p.

Wyznaczy promień okręgu (lub kwadrat promienia okręgu): $r=\frac{17}{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.

Zdający wyznaczy równanie okręgu: $x^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{289}{9}$.

II sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.
Zdający
- zapisze współrzędne punktu S w zależności od jednej zmiennej, np.: $S=(3y-1,\ y)$

albo
- zapisze równość $|AS|^2=|BS|^2$ lub równoważne równanie

  $(x+5)^2+(y-3)^2=x^2+(y-6)^2$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... 2 p.
Zdający zapisze układ równań

$$10x+6y=2 \text{ i } x-3y=-1$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności .... 3 p.
Zdający wyznaczy współrzędne punktu S:

$$S=\left(0,\frac{1}{3}\right)$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 p.
Wyznaczy kwadrat promienia okręgu (lub promień okręgu): $r^2=\frac{289}{9}$
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.
Zdający wyznaczy równanie okręgu: $x^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{289}{9}$.

III sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.
Zdający
- zapisze układ równań: $\begin{cases}(-5-a)^2+(3-b)^2=r^2\\(-a)^2+(6-b)^2=r^2\end{cases}$

albo

- zauważy, że współrzędne środka okręgu spełniają równanie: $a-3b+1=0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... **2 p.**

Zdający zapisze układ równań: $\begin{cases}(-5-a)^2+(3-b)^2=r^2\\(-a)^2+(6-b)^2=r^2\end{cases}$ i zauważy, że współrzędne środka okręgu spełniają równanie $a-3b+1=0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności .... **3 p.**

Zdający wyznaczy współrzędne punktu *S*: $S=\left(0,\frac{1}{3}\right)$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... **4 p.**

Wyznaczy promień okręgu (lub kwadrat promienia okręgu): $r=\frac{17}{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... **5 p.**

Zdający wyznaczy równanie okręgu: $x^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{289}{9}$.

Uwaga

Jeżeli zdający oblicza współrzędne punktu *P* przecięcia danej prostej z osią *Oy*, oblicza odległość *PB*, zapisuje równanie okręgu i na tym poprzestaje, to otrzymuje **0 punktów**.